几乎周期MA信号参数的闭式递推估计

李宏伟[1],袁保宗[2]
(1. 中国地质大学数理系,武汉 430074;2. 北方交通大学信息科学研究所,北京 100044)

摘 要: 本文利用高阶循环统计量讨论几乎周期滑动平均(APMA)信号参数的闭式递推估计.建立了两组关于APMA信号系数和奇数阶时变累量的关系式,并据此提出了两种直接估计信号参数的方法.在此基础之上,导出了信号参数的闭式递推估计.最后,给出了所提方法的模拟结果.

关键词: 几乎周期MA信号; 时变累量; 参数估计; 闭式递推估计
中图分类号: TN911.7 **文献标识码**: A **文章编号**: 0372-2112 (2000) 10-0124-03

Closed-Form Recursive Estimation for Parameters of Almost Periodic MA Signal

LI Hong-wei[1], YUAN Bao-zong[2]
(1. *Department of Mathematics and Physics, China University of Geosciences, Wuhan* 430074, *China*;
2. *Institute of Information Science, Northern Jiaotong University, Beijing* 100044, *China*)

Abstract: This paper deals with the closed-form recursive estimation for parameters of almost periodic moving average (APMA) signal using higher order cyclic-statistics. Two groups of representation formulas relating the coefficients of APMA signal and odd order time-varying cumulants are established, from which two direct algorithms are presented for estimating parameters of APMA signal. As a consequence, the closed-form recursive formulas of APMA coefficients are derived. Simulations are given to illustrate the performance of the presented methods.

Key words: almost periodic MA signal; time-varying cumulant; parameter estimation; closed-form recursive estimation

1 引言

考虑下列 q 阶几乎周期滑动平均(APMA)信号模型[1~3]

$$x(t)=\sum_{n=0}^{q}h(t,n)\,\varepsilon(t-n) \tag{1}$$

并且假设下列假定成立.

假定1 激励噪声 $\varepsilon(t)$ 是零均值独立同分布的,且存在一个奇数 $k(\geq 3)$,使得其 k 阶累量 $\gamma_{k\varepsilon}$ 满足 $0<|\gamma_{k\varepsilon}|<+\infty$.

假定2 对于每一个固定的 n,有限冲激响应序列 $h(t,n)$ 是关于 t 的几乎周期实序列(可以是非最小相位的),并且,$h(0,0)=1$; $h(t,0)\neq 0$, $h(t,q)\neq 0$, $\forall t$.

在实际应用中,信号 $x(t)$ 是在噪声中被观测的:

$$y(t)=x(t)+v(t),\ t=0,1,\cdots,T-1 \tag{2}$$

其中,加性噪声 $v(t)$ 满足:

假定3 $v(t)$ 是一个与 $\varepsilon(t)$ 独立的功率谱未知的零均值高斯(有色)过程(可以是非平稳的).

满足模型式(2)和假定1~3的信号是平稳MA信号在几乎周期[1,6]时变情形的推广,它是一类重要的非平稳信号.这一类信号在通信、水文、气象等领域具有广泛的应用[1].近年来,随着循环统计量这一信号处理新工具的发展,对于APMA信号的研究正在逐步深入.文献[1]提出了基于循环统计量的信号参数估计的线性和非线性算法,以及一种统计定阶方法.文献[2]提出了两种法方程方法和一种基于奇异值分解的定阶方法.文献[3]建立了另外两类线性法方程并基于时变累量和循环累量分别提出了时域定阶方法.对于平稳MA信号,闭式递推估计是一类重要的参数估计方法[4,5].其理论意义在于[5],若某种方法存在闭式递推公式,则该方法具有唯一解.但是,对于APMA信号,尚未对参数的闭式递推估计方法进行深入研究.因此,本文的目的是建立APMA信号参数的基于时变累量的闭式递推公式,同时得到了两个用于直接估计信号参数的公式.

2 时变累量和参数估计

根据时变累时的定义和性质[6]可知,对于满足模型式(2)和假定3的信号,当 $k\geq 3$ 时,有

$$c_{kx}(t;\boldsymbol{\tau})=c_{ky}(t;\boldsymbol{\tau}),\ \boldsymbol{\tau}\triangleq(\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_{k-1})$$

即观测信号 $y(t)$ 与无加性噪声污染的信号 $x(t)$ 具有相同的时变累量,因此,在基于高阶时变累量的分析中不必考虑加性高斯(平稳和非平稳)噪声的影响.由累量性质可得,满足模型式(1)和假定1-2的APMA信号 $x(t)$ 的 $k(\geq 3)$ 阶时变累量为

收稿日期:1999-08-26;修回日期:2000-04-18
基金项目:国家自然科学基金(No.69789301)

$$c_{kx}(t;\boldsymbol{\tau}) = \gamma_{k\varepsilon}\sum_{n=0}^{q} h(t,n)\,h(t+\tau_1,n+\tau_1)\cdots h(t+\tau_{k-1},n+\tau_{k-1}) \tag{3}$$

它是平稳 MA 信号的 BBR 公式[7]在 APMA 情形的推广.

在式(3)中令 $\tau_1 = q,\tau_2 = i,\tau_3 = \tau_4 = \cdots = \tau_{k-1} = 0$ 得到

$$c_{kx}(t;q,i,0,\cdots,0) = \gamma_{k\varepsilon}h^{k-2}(t,0)\,h(t+q,q)\,h(t+i,i) \tag{4}$$

上式中分别取 $i = 0$ 和 $i = q$ 得到

$$c_{kx}(t;q,0,0,\cdots,0) = \gamma_{k\varepsilon}h^{k-1}(t,0)\,h(t+q,q) \tag{5}$$

$$c_{kx}(t;q,q,0,\cdots,0) = \gamma_{k\varepsilon}h^{k-1}(t,0)\,h^2(t+q,q) \tag{6}$$

由式(4)和(5)得到

$$\frac{h(t,i)}{h(t-i,0)} = \frac{c_{kx}(t-i;q,i,0,\cdots,0)}{c_{kx}(t-i;q,0,0,\cdots,0)} \tag{7}$$

由式(5)和(6)得到

$$\gamma_{k\varepsilon}h^k(t,0) = \frac{c_{kx}^2(t;q,0,0,\cdots,0)}{c_{kx}(t;q,q,0,\cdots,0)} \tag{8}$$

考虑到假定 2,由上式得到

$$\gamma_{k\varepsilon} = \frac{c_{kx}^2(0;q,0,0,\cdots,0)}{c_{kx}(0;q,q,0,\cdots,0)} \tag{9}$$

式(9),(8)和(7)是一组直接描述信号参数和时变累量关系的表达式.这一组公式是平稳 MA 信号的 $C(q,k)$ 公式[8]在 APMA 情形的推广.事实上,在式(1)中若 $h(t,i) = b(i)$,则式(7)就是 $C(q,k)$ 公式[8].因此,式(7)可以认为是 APMA 信号的 $C(q,k)$ 公式.

式(7)～(9)同时构成了一种直接估计 APMA 信号参数的方法:首先利用式(9)估计驱动噪声的 k 阶累量 $\gamma_{k\varepsilon}$,然后由式(8)估计任一时刻 t 的首项 MA 系数 $h(t,0)$,最后由式(7)估计任一时刻 t 的各项 MA 系数 $h(t,i)$.需要指出的是,若已知 $h(t,0) > 0$,则不需要假定 k 为奇数也可以由式(7)和式(8)估计 $h(t,i)$.

现在考虑另一种直接估计信号参数的公式.在式(3)中,令 $\tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_{k-2} = q$,得到

$$c_{kx}(t;q,\cdots,q,\tau_{k-1}) = \gamma_{k\varepsilon}h(t,0)\,h^{k-2}(t+q,q)\cdot h(t+\tau_{k-1},\tau_{k-1}) \tag{10}$$

利用上式不难得到

$$c_{kx}(t-i;q,\cdots,q,i) = \gamma_{k\varepsilon}h(t-i,0)\,h^{k-2}(t-i+q,q)\cdot h(t,i) \tag{11}$$

$$c_{kx}(t-i;q,\cdots,q,q) = \gamma_{k\varepsilon}h(t-i,0)\,h^{k-1}(t-i+q,q) \tag{12}$$

$$c_{kx}(t-i;q,\cdots,q,0) = \gamma_{k\varepsilon}h^2(t-i,0)\,h^{k-2}(t-i+q,q) \tag{13}$$

由式(11)和(12)可得

$$\frac{h(t,i)}{h(t-i+q,q)} = \frac{c_{kx}(t-i,q,\cdots,q,i)}{c_{kx}(t-i,q,\cdots,q,q)} \tag{14}$$

由式(12)和(13)可得

$$\gamma_{k\varepsilon}h^k(t-i+q,q) = \frac{c_{kx}^2(t-i;q,\cdots,q,q)}{c_{kx}(t-i;q,\cdots,q,0)} \tag{15}$$

在式(12)和(13)中令 $t = i = 0$,并考虑到假定 2($h(0,0) = 1$),可得

$$\gamma_{k\varepsilon} = \frac{c_{kx}^{k-1}(0;q,\cdots,q,0)}{c_{kx}^{k-2}(0;q,\cdots,q,q)} \tag{16}$$

式(16),(15)和(14)是本文得到的另一组直接表示信号参数和时变累量关系的表达式.它们也构成了另一种直接估计 APMA 信号参数的方法:首先利用式(16)估计驱动噪声的 k 阶累量 $\gamma_{k\varepsilon}$,然后由式(15)估计任一时刻 t 的末项 MA 系数 $h(t,q)$,最后由式(14)估计任一时刻 t 的各项 MA 系数 $h(t,i)$.

需要指出的是,在 $k = 3$ 的情形,式(7)～(9)和式(14)～(16)在本质上是一致的.而在实际的估计计算中,最常用的是三阶或四阶统计量,所以,只需要式(7)～(9)就足够了.但是,式(14)～(16)在理论分析中还是有用的.

本文在上述两类公式的基础上来推导 APMA 信号参数的闭式递推公式.在式(3)中,令 $\tau_1 = i,\tau_2 = \cdots = \tau_{k-1} = 0$,得到

$$c_{kx}(t;i,0,\cdots,0) = \gamma_{k\varepsilon}\sum_{n=0}^{q} h^{k-1}(t,n)\,h(t+i,n+i) \tag{17a}$$

上式可以变换为

$$c_{kx}(t-i;i,0,\cdots,0) = \gamma_{k\varepsilon}\sum_{n=0}^{q} h^{k-1}(t-i,n-i)\,h(t,n) \tag{17b}$$

在上式中令 $i = -q,t = 0$,可得

$$\gamma_{k\varepsilon} = \frac{c_{kx}(q;-q,0,0,0,\cdots,0)\,c_{kx}^{k-1}(0;q,0,0,\cdots,0)}{c_{kx}^{k-1}(0;q,q,0,\cdots,0)} \tag{18a}$$

或者

$$\gamma_{k\varepsilon} = \frac{c_{kx}(q;-q,0,0,0,\cdots,0)\,c_{kx}^{k-1}(0;q,\cdots,q,0)}{c_{kx}^{k-1}(0;q,\cdots,q,q)} \tag{18b}$$

令 $a_t(m,n) \triangleq \gamma_{k\varepsilon}h^{k-1}(t-q+m,n)$,$n = 0,1,2,\cdots,m$,$m = 0,1,2,\cdots,q$.那么,基于式(7)～(9)的 $a_t(m,n)$ 的计算公式为

$$a_t(m,n) = \gamma_{k\varepsilon}^{1/k}\frac{c_{kx}^{k-1}(t-q+m-n;q,n,0,\cdots,0)}{[c_{kx}(t-q)+m-n;q,0,0,\cdots,0]^{[(k-1)(k-2)]/k}[c_{kx}(t-q+m-n;q,q,0,\cdots,0)]^{(k-1)/k}} \tag{19a}$$

基于式(14)～(16)的 $a_t(m,n)$ 的计算公式为

$$a_t(m,n) = \gamma_{k\varepsilon}^{1/k}\frac{c_{kx}^{k-1}(t-q+m-n;q,\cdots,q,n)}{[c_{kx}(t-q+m-n;q,\cdots,q,q)]^{[(k-1)(k-2)]/k}[c_{kx}(t-q+m-n;q,\cdots,q,0)]^{(k-1)/k}} \tag{19b}$$

在式(17b)中令 $i = q$ 可得

$$h(t,q) = \frac{c_{kx}(t-q;q,0,0,\cdots,0)}{a_t(0,0)} \tag{20}$$

进一步,在式(17b)中令 $i = q-m$,则有

$$h(t,q-m) = \frac{c_{kx}(t-q+m,q-m,0,\cdots,0)}{a_t(m,0)} - \frac{1}{a_t(m,0)}\sum_{i=1}^{m}a(m,i)\,h(t,q-m+i),\ m = 1,2,\cdots,q \tag{21}$$

式(18)～(21)是本文得到的关于 APMA 信号参数的一种闭式递推公式.由式(19),式(4)～(6),式(11)～(13)和假定 2

可知,对于任意 t 和 $0 \le m \le q$,都有 $a_t(m,0) \neq 0$. 因此,递推公式中不存在除零的隐患,由式(20)～(21)得到的 $h(t,i)$ 的解是唯一的. 同时,这也说明了由式(17b)建立的线性法方程[2,3]具有唯一的最小二乘解.

式(18)～(21)同时构成了 APMA 信号参数的一种闭式递推的时变累积量算法:对于任一时刻 t,首先由式(18)和式(19)估计 $\gamma_{k\epsilon}$ 和 $a_t(m,n)$,然后由递推公式(20)和(21)估计 $h(t,i)$,其中,信号 $x(t)$ 的高阶时变累量用实际观测信号 $y(t)$ 相对应的高阶时变累量的估计值来代替. 由于递推公式只涉及信号的高阶时变累量,所以,上述闭式递推估计算法适应于任何加性高斯(平稳和非平稳)噪声情形.

基于式(17a),类似于式(18)～(21)的讨论,可以得到关于 $h^{k-1}(t,i)$ 的闭式递推公式(平稳情形的结果可参见文献[5]),详细推导从略.

3 仿真实验

本节对于 APMA 信号参数的闭式递推估计方法进行仿真实验. 在模型(1)和(2)中,驱动噪声 $\epsilon(t)$ 取零均值独立的指数分布随机数,并且,$\sigma_\epsilon^2 = 1$, $\gamma_{3\epsilon} = 2$. 加性噪声 $v(t)$ 取零均值 $AR(2)$ 高斯过程:

$$v(t) - 1.6v(t-1) + 0.68v(t-2) = e(t) \tag{22}$$

几乎周期冲激响应序列 $h(t,n)$ 取为关于 t 的周期为 2 的实序列:

t 为偶数时: $h(t,0) = 1$, $h(t,1) = 0.2$, $h(t,2) = -0.75$;

t 为奇数时; $h(t,0) = 0.6$, $h(t,1) = -0.65$, $h(t,2) = 1.2$.

即无噪声污染的信号 $x(t)$ 是一个周期为 2 的时变 MA(2) 过程.

t 为偶数时, $x(t) = \epsilon(t) + 0.2\epsilon(t-1) - 0.75\epsilon(t-2)$;

t 为奇数时, $x(t) = 0.6\epsilon(t) - 0.65\epsilon(t-1) + 1.2\epsilon(t-2)$.

信噪比定义为 $SNR = 10\log_{10}(\sigma_\epsilon^2/\sigma_v^2)$. 在实验中,信噪比取为 0dB,观测数据 $y(t)$ 根据上述参数和式(1)～(2)产生. $x(t)$ 的高阶时变累量用 $y(t)$ 的高阶时变累量代替,数据长度取为 8192,Monte Carlo 运行次数为 100. 分别利用基于三阶时变累量的线性法方程方法(LNEM)和闭式递推估计方法(CFRM)进行参数估计计算. 参数估计的统计结果见表 1.

表 1 基于三阶时变累量的参数估计的统计结果

待估参数		$\gamma_{3\epsilon}$	$h(0,1)$	$h(0,2)$	$h(1,0)$	$h(1,1)$	$h(1,2)$
真值		2.00000	0.20000	-0.75000	0.60000	-0.65000	1.20000
LNEM	估计均值	2.02758	0.26036	-0.75511	0.61655	-0.59606	1.16906
	标准偏差	0.29703	0.09312	0.11403	0.12365	0.12205	0.18681
CFRM	估计均值	2.04150	0.28999	-0.73729	0.61500	-0.58817	1.14811
	标准偏差	0.41355	0.09092	0.08855	0.11413	0.10656	0.11891

表 1 说明参数估计的法方程方法和闭式递推方式都具有较好的估计均值和较小的标准偏差. 法方程方法的估计均值略精于闭式递推方法的估计均值,但闭式递推方法的稳定性略优于法方程方法. 从总体来看,当 APMA 信号的阶数较低时,二者的估计精度差别不大.

4 结束语

本文通过研究 APMA 信号参数和时变累量之间的关系建立了类似于平稳 MA 信号 $C(q,k)$ 公式的关系式,并提出了两种直接由信号的时变累量估计 APMA 信号系数的方法. 在此基础之上,导出了 APMA 信号系数的基于奇数阶时变累量的闭式递推公式.

本文的主要目的不在于将得到的闭式递推公式作为实际的参数估计算法,而是在理论上证明其参数估计方法具有唯一解. 从而说明了线性法方程方法具有唯一的最小二乘解. 尽管本文仅讨论了一类累积量切片情形,但其方法可以推广到讨论其他类型的累积量切片情形.

参考文献:

[1] A. Dandawate and G. B. Giannakis. Modeling (almost) periodic moving average processes using cyclic statistics [J]. IEEE Trans., 1996, SP-44 (3): 673 - 684.

[2] Y.-Ch. Liang and A. R. Leyman. (Almost) Periodic moving average system identification using higher order cyclic-statistics [J]. IEEE Trans., 1998, SP-46(3): 779 - 783.

[3] 李宏伟,袁保宗. 几乎周期时变 MA 系统的辨识 [J]. 电子学报, 1999, 27(12): 52-55.

[4] A. Swami and J. M. Mendel. Closed-form recursive estimation of moving average coefficients using autocorrelation and third-order cumulants [J]. IEEE Trans., 1989, ASSP-37: 1794 - 1795.

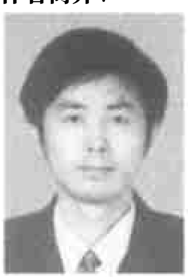
[5] X. D. Zhang and Y. S. Zhang. FIR system identification using higher order cumulants alone [J]. IEEE Trans. 1994, SP-42 (10): 2854 - 2858.

[6] A. Dandawate and G. B. Giannakis. Nonparametric polyspectral estimators for kth-order (almost) cyclostationary processes [J]. IEEE Trans. 1994, IT-40(1): 67 - 84.

[7] D. B. Brillinger and M. Rosenblatt. Computation and interpretation of k-th order spectra. in Spectral Analysis of Time Series [Z]. Harries ed, New York: Wiley, 1967: 189 - 232.

[8] G. B. Giannakis. Cumulants: A powerful tool in signal processing [A]. Proc. IEEE [C], 1987, 75: 1333 - 1334.

作者简介:



李宏伟 1996 年获北京大学理学博士学位,1998 年在北方交通大学完成博士后研究工作. 现在中国地质大学(武汉)数理系工作. 目前研究方向为非线性时间序列分析和非平稳信号处理.

袁保宗 北方交通大学教授,博士导师. 目前研究领域为语音信号处理,多媒体信息处理,数据通讯和信息融合.